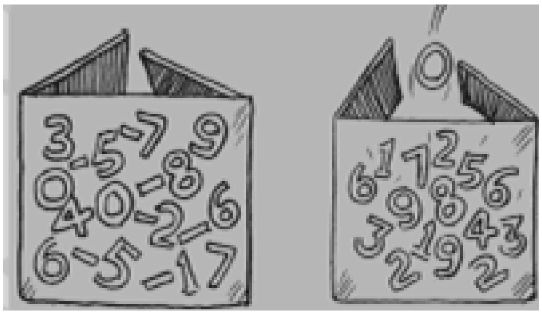
पूर्णाङ्कः

अध्यायः 1

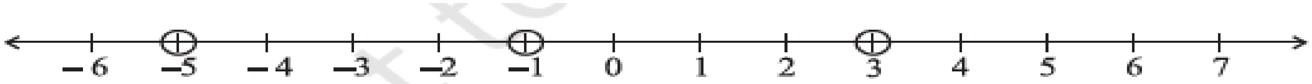
1.1 भूमिका

वयं षष्ठ-कक्ष्यायां पूर्णसङ्ख्यानां पूर्णाङ्कानां च विषये अध्ययनं कृतवन्तः। वयं जानीमः यत् पूर्णाङ्कः, सङ्ख्यानाम् एकः बृहत्सङ्ग्रहः भवति, यस्मिन् पूर्णसङ्ख्याः एवञ्च ऋणात्मकाः सङ्ख्याः सम्मिलिताः भवन्ति। भवन्तः पूर्णाङ्केषु तथा च पूर्णसङ्ख्यासु अन्यं किम् अन्तरं प्राप्नुवन्? अस्मिन् अध्याये, वयं पूर्णाङ्कानां, तेषां गुणानाम् एवञ्च सङ्क्रियाणां विषये विस्तरेण अधिगमिष्यामः। सर्वप्रथमं वयं गतकक्ष्यासु पूर्णाङ्कैः सम्बद्धकार्यस्य समीक्षां करिष्यामः एवञ्च तस्य आवृत्तिम् अपि करिष्यामः।

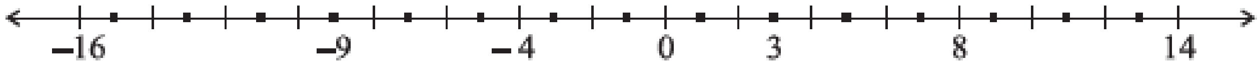


1.2 पुनरावलोकनम्

वयं जानीमः यत् पूर्णाङ्कानां सङ्ख्या-रेखायां कथं निरूपणं भवति इति। अधः प्रदत्तायां सङ्ख्यारेखायां केचन पूर्णाङ्काः अङ्किताः सन्ति :



किं भवन्तः अङ्कितान् पूर्णाङ्कान् आरोहिक्रमे लेखितुं शक्नुवन्ति एतासां सङ्ख्यानाम् आरोहिक्रमः – 5, – 1, 3 इति अस्ति। अस्माभिः – 5 इति सर्वाभ्यः ह्रस्वासङ्ख्यारूपेण किमर्थं चिता?



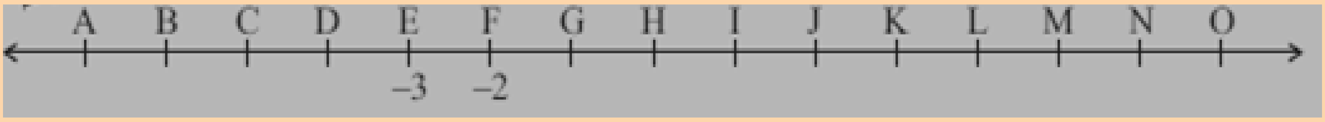
निम्नलिखितायां सङ्ख्यारेखायां पूर्णाङ्कैः सह केचन बिन्दवः अङ्किताः सन्ति। एतान् पूर्णाङ्कान् अवरोहिक्रमे लिखन्तु।

प्रयासं कुर्वन्तु

एतेषां पूर्णाङ्कानाम् अवरोहक्रमः 14, 8, 3, ... इति अस्ति।

उपर्युक्तायां सङ्ख्यारेखायां केवलं केचन एव पूर्णाङ्काः लिखिताः सन्ति। प्रत्येकं बिन्दौ उचितसङ्ख्यां लिखन्तु।

1. पूर्णाङ्कानां निरूपयित्री एका रेखा अधः दत्ता अस्ति :



–3 एवञ्च –2 इत्येतं क्रमशः E तथा च F द्वारा अङ्कितम् अस्ति। A, B, D, H, J, M एवञ्च O द्वारा के पूर्णाङ्काः अङ्किष्यते ?

2. 7, –5, 4, 0 तथा च – 4 इत्येतान् पूर्णाङ्कान् आरोहिक्रमे क्रमबद्धान् कुर्वन्तु निजोत्तरं च अवेक्षितुम् एतान् एकस्यां सङ्ख्यारेखायाम् अङ्कयन्तु।

वयम् अस्माकं गतकक्ष्यायां पूर्णाङ्कानां योगस्य व्यवकलनस्य च अध्ययनम् अकुर्म।

निम्नलिखितानि कथनानि पठन्तु यदा वयम् :

(i) एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं योजयामः, तर्हि दक्षिणं प्रति गच्छामः।

(ii) एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं योजयामः, तर्हि वामदिशां प्रति गच्छामः।

(iii) एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं व्यवकलयामः, तर्हि दक्षिणं प्रति गच्छामः।

(iv) एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं व्यवकलयामः, तर्हि वामं प्रति गच्छामः।

सूचयन्तु यत् निम्नलिखितानि शुद्धानि अशुद्धानि वा सन्ति। यानि कथानानि अशुद्धानि सन्ति तानि शोधयन्तु।

(i) यदा द्वयोः धनात्मकपूर्णाङ्कयोः योजनं भवति, तदा वयम् एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

(ii) यदा द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कयोः योजनं भवति, तदा वयम् एकं धनात्मकपूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

(iii) यदा एकस्य धनात्मकपूर्णाङ्कस्य एकस्य च ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य योजनं भवति, तदा सदैव एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः प्राप्तः भवति।

(iv) 8 इति पूर्णाङ्कस्य योज्यः प्रतिलोमः (– 8) इति अस्ति एवञ्च (– 8) इत्यस्य 8 इति योज्यः प्रतिलोमः अस्ति।

(v) व्यवकलनार्थम्, यः व्यवकल्यमाणः पूर्णाङ्कः अस्ति तस्य योज्यं प्रतिलोमं द्वितीय-पूर्णाङ्केन सह योजयामः।

(vi) (–10) + 3 = 10 – 3

(vii) 8 + (–7) – (– 4) = 8+7– 4

स्वस्य उत्तराणां तुलनां निम्नलिखितैः उत्तरैः सह कुर्वन्तु :

(i) शुद्धम् अस्ति। उदाहरणतः

(a) 56 + 73 = 129 (b) 113 + 82 = 195 इत्यादि।

अस्य कथनस्य समर्थने अन्यानि पञ्चोदाहरणानि यच्छन्तु।

(ii) अशुद्धम्, यतोहि (– 6) + (– 7) = – 13 अस्ति यत् धनात्मक-पूर्णाङ्कः नास्ति। शुद्धं कथनम् एवम् अस्ति।

यदा वयं द्वौ ऋणात्मकपूर्णाङ्कौ योजयामः, तदा वयम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कम् एव प्राप्नुमः।

उदाहरणतः

(a) (– 56) + (– 73) = – 129 (b) (– 113) + (– 82) = – 195, इत्यादि।

एतत् कथनं प्रमाणीकर्तुं स्वपक्षतः अन्यानि पञ्च उदाहरणानि यच्छन्तु।

(iii) अशुद्धम्, यतोहि – 9 + 16 = 7, एषः एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः नास्ति। उचितं कथनम् एवम् अस्ति - यदा एकः धनात्मक-पूर्णाङ्कः एकः च ऋणात्मक-पूर्णाङ्कः योज्येते, तदा वयं तयोः अन्तरं स्वीकुर्मः बृहत्-पूर्णाङ्कस्य च चिह्नं तस्मात् अन्तरात् पूर्वं स्थाप्यते । बृहत्-पूर्णाङ्कस्य निर्णयः द्वयोः पूर्णाङ्कयोः चिह्नानि अनपेक्ष्य क्रियते। उदाहरणतः

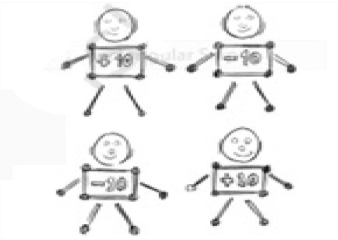
(a) (– 56) + (73) = 17 (b) (– 113) + 82 = – 31

(c) 16 + (– 23) = – 7 (d) 125 + (– 101) = 24

एतत् कथनं प्रमाणीकर्तुम् अन्यानि पञ्च उदाहरणानि यच्छन्तु।

(iv) उचितम्, योज्य- प्रतिलोमस्य अन्यानि उदाहराणि निम्नलिखितानि सन्ति :

पूर्णाङ्कः	योज्यः प्रतिलोमः
10	–10
–10	10
76	–76
–76	76



अतः a इति कस्यचित् पूर्णाङ्कस्य योज्यः प्रतिलोमः – a इति अस्ति तथा च (– a) इत्यस्य a योज्यः प्रतिलोमः अस्ति।

(v) उचितम्, व्यवकलनम्, योगस्य विपरीतं भवति अतः च वयं व्यवकल्यमानस्य पूर्णाङ्कस्य योज्यं प्रतिलोमम् अपरस्मिन् पूर्णाङ्के योजयामः। उदाहरणतः,

(a) 56 – 73 = 56 + 73 इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः = 56 + (–73) = –17

(b) 56 – (–73) = 56 + (–73) इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः = 56 + 73 = 129

(c) (–79) – 45 = (–79) + (– 45) = –124

(d) (–100) – (–172) = –100 + 172 = 72 इत्यादिः।

अस्य कथनस्य निरूपणार्थम् एतादृशानि न्यूनातिन्यूनानि पञ्च उदाहरणानि लिखन्तु।

इत्थम्, वयं प्राप्नुमः यत् a एवञ्च b इति कयोश्चित् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः कृते,

a – b = a + b इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः = a + (– b)

अन्यच्च a – (– b) = a + (– b) इत्यस्य योज्यः प्रतिलोमः = a + b

(vi) अशुद्धम् अस्ति। यतोहि (–10) + 3 = –7 तथा च 10 – 3 = 7,

अतः (–10) + 3= 10-3 इति अस्ति।

(vii) अशुद्धम् अस्ति। यतोहि 8 + (–7) – (– 4) = 8 + (–7) + 4 = 1 + 4 = 5

अन्यच्च 8 + 7 – 4 = 15 – 4 = 11 इति अस्ति, अतः

8 + (–7) – (– 4) = 8 – 7 + 4 इति अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

गतकक्ष्यायाम् अस्माभिः सङ्ख्याभिः सह विभिन्नानि प्रतिरूपाणि (पैटर्न) ज्ञातानि। किं भवन्तः निम्नलिखितेषु प्रत्येकं सङ्ख्यार्थम् एकं प्रतिरूपं ज्ञातुम् अर्हन्ति ? यदि आम्, तदा एतानि रिक्तस्थानि पूरयन्तु।

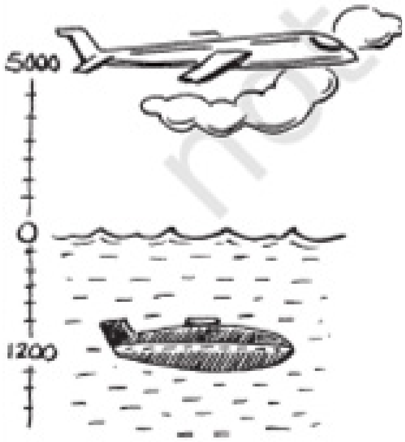
(a) 7, 3, – 1, – 5, ______, ______, ______. (b) – 2, – 4, – 6, – 8, ______, ______, ______.

(c) 15, 10, 5, 0, ______, ______, ______. (d) – 11, – 8, – 5, – 2, ______, _____, ______.

एतादृशानि कानिचित् अन्यानि प्रतिरूपाणि निर्मान्तु तानि च पूरयितुं स्वीय-मित्रानि वदन्तु।

प्रश्नावली 1.1

1. कस्मिंश्चित् विशिष्टे दिवसे विभिन्नस्थानानां तापमानं डिग्री सेल्सियस् (°C) मध्ये निम्नलिखित-सङ्ख्यया दर्श्यते :



(a) एतां सङ्ख्यारेखां पश्यन्तु अस्यां च अङ्कितस्थानानां तापमानानि लिखन्तु।

(b) उपर्युक्तेषु स्थानेषु सर्वस्मात् उष्णस्य सर्वस्मात् च शीतस्य स्थानयोः तापमानेषु किम् अन्तरम् अस्ति ?

(c) लाहुलस्पितिः एवञ्च श्रीनगरम् इति स्थानयोः तापमाने किम् अन्तरम् अस्ति ?

(d) किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् शिमलायाः श्रीनगरस्य च तापमानस्य योगः शिमलायाः तापमानात् न्यूनः अस्ति ? किम् एतयोः द्वयोः स्थानयोः तापमानयोः योगः श्रीनगरस्य तापमानात् न्यूनः अस्ति ?

2. कस्याञ्चित् प्रश्नोत्तरस्पर्धायां शुद्धोत्तराय धनात्मकाः अङ्काः दीयन्ते अशुद्धोत्तराय ऋणात्मकाः अङ्काः दीयन्ते। यदि पञ्चसु आवर्तेषु (rounds) जैकवर्येण प्राप्ताः अङ्काः 25, – 5, – 10, 15 एवञ्च 10 आसन्, तदा निर्दिशन्तु यत् अन्ते तस्य अङ्कानां योगः कियान् आसीत् ?

3. सोमवासरे श्रीनगरस्य तामानम् – 5°C इति आसीत् मङ्गलवासरे च तापमानम् 2°C न्यूनम् अभवत्। मङ्गलवासरे श्रीनगरस्य तामानं किम् आसीत् ? बुधवासरे तापमानम् 4°C वर्धितम्। बुधवासरे किं तापमानम् आसीत् ?

4. एकं वायुयानं समुद्रतलात् 5000 मी.परिमिते औन्नत्ये उड्डयत् अस्ति। एकस्मिन् विशिष्टे स्थाने एतत् वायुयानं समुद्रतलात् अधः 1200 मी. अगाधतायां तरन्तीम् एकां जलमग्ननौकाम् उपर्युपरि अस्ति। जलमग्ननौकायाः तथा च वायुयानस्य मध्ये ऊर्ध्वाधरं कियती दूरता अस्ति ?

5. मोहनः स्वस्य गणनापञ्जिकायाम् (लेखायाम्) 2000 रूप्यकाणि सङ्गृह्णाति (सञ्चिनोति) अन्येद्युः गणनापञ्जिकातः 1642 रूप्यकाणि निष्कासयति। यदि लेखातः निस्कास्यमानः राशिः ऋणात्मकसङ्ख्यया निरूप्यते, तदा गणनापञ्जिकायां सङ्गृहीतराशिं भवन्तः कथं निरूपयिष्यन्ति? निर्गमनस्य अनन्तरं मोहनस्य लेखायां शेषः राशिः ज्ञायताम्।

6. रीता A बिन्दुतः पूर्व-दिशि B बिन्दुपर्यन्तं 20 कि.मी. दूरं गच्छति। तस्य एव मार्गस्य B इति अनुदिशबिन्दुतः 30 कि.मी. दूरं पश्चिमं प्रति गच्छति। यदि पूर्वं प्रति समाकलिता दूरता ऋणात्मकपूर्णाङ्केन निरूप्यते, तदा पश्चिम-दिशि समाकलितां दूरतां भवन्तः कथं निरूपयिष्यन्ति ? A बिन्दुतः तस्याः अन्तिमां स्थितिं केन पूर्णाङ्केन निरूपयिष्यन्ति ?

7. कस्मिंश्चित् भद्र-गणिते प्रत्येकं पङ्क्तेः, प्रत्येकं स्तम्भस्य प्रत्येकं च विकर्णस्य सङ्ख्यानां योगः समानः भवति। बोधयन्तु यत् निम्नलिखतयोः कतमः वर्गः ऐन्द्रजालिकवर्गः अस्ति ?

5	-1	-4
-5	-2	7
0	3	-3

(i)

1	-10	0
-4	-3	-2
-6	4	-7

(ii)

8. a तथा च b इत्येतयोः निम्नलिखितमानेभ्यः $a - (-b) = a + b$ इति निरूपयन्तु।

(i) $a = 21, b = 18$ (ii) $a = 118, b = 125$

(iii) $a = 75, b = 84$ (iv) $a = 28, b = 11$

9. निम्नलिखितानि कथनानि प्रमाणीकर्तुम्, पेटिकायां >, < अथवा = इति सङ्केतानाम् उपयोगं कुर्वन्तु

(a)	$(-8) + (-4)$	☐	$(-8) - (-4)$
(b)	$(-3) + 7 - (19)$	☐	$15 - 8 + (-9)$
(c)	$23 - 41 + 11$	☐	$23 - 41 - 11$
(d)	$39 + (-24) - (15)$	☐	$36 + (-52) - (-36)$
(e)	$-231 + 79 + 51$	☐	$-399 + 159 + 81$

10. जलस्य एकस्मिन् सरोवरे अन्तर्मुखानि सोपानानि सन्ति। एकः वानरः उपरितने सोपाने (अर्थात् प्रथमे सोपाने) उपविष्टः वर्तते। जलं नवतमे सोपाने अस्ति।

(i) सः एकेन कूर्दनेन सोपानत्रयम् अधः (अधोमुखम्) द्वितीयेन च कूर्दनेन सोपानद्वयम् ऊर्ध्वं गच्छति। वानरः कतिभिः कूर्दनैः जलस्तरम् अवाप्स्यति।

(ii) जलपानान्तरं सः प्रत्यागन्तुम् इच्छति। एतदर्थं सः एकेन कूर्दनेन चत्वारि सोपानानि ऊर्ध्वम् अपरेण च कूर्दनेन सोपानद्वयम् अधः गच्छति। कतिभिः कूर्दनैः सः सर्वोपरितनं सोपानं प्राप्स्यति ?

(iii) यदि अधोमुखगामिनां सोपानानां सङ्ख्या ऋणात्मकेन पूर्णाङ्केन निरूप्यते ऊर्ध्वगामिनां च समाकलितानां सोपानानां सङ्ख्या धनात्मकेन पूर्णाङ्केन निरूप्यते, तदा निम्नलिखितानि रिक्तस्थानानि पूरयन्तः (i) तथा च (ii) भागे तस्य गतिं निरूपयन्तु।

(a) $-3 + 2 + ... = -8$ (b) $4 - 2 + ... = 8$.

(a) अत्र योगः (-8) इति अष्टौ सोपानानि अधोगमनं निरूपयति, तर्हि

(b) अत्र योगः 8 इति कं निरूपयिष्यति ?

1.3 पूर्णाङ्कानां योगः एवं व्यवकलनानां गुणाः

1.3.1 योगान्तर्गतः संवृत्तः

वयम् अधिगतवन्तः यत् द्वयोः पूर्णाङ्कसंख्ययोः योगः पुनः एका पूर्णा संख्या एव भवति। उदाहरणतः $17+24 = 41$ अस्ति, या पुनः एका पूर्णा संख्या अस्ति। वयं जानीमः यत् एषः गुणः पूर्णसंख्यानां योगस्य 'संवृतगुणः' इति कथ्यते।

आगच्छन्तु पश्यामः किम् एषः गुणः पूर्णाङ्केभ्यः अपि सत्यम् अस्ति अथवा नास्ति इति। पूर्णाङ्कानां केचन युग्माः अधः दत्ताः सन्ति। अधः दत्तां सारणीं पश्यन्तु एतां च पूरयन्तु :

कथनम्		प्रेक्षणम्
(i)	17 + 23 = 40	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।
(ii)	(- 10) + 3 = --------------	--------------------------------
(iii)	(-75) + 18 = -------------	--------------------------------
(iv)	19 + (-25) = -6 ----------	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।
(v)	27 + (-27) = -------------	--------------------------------
(vi)	(-20) + 0 = ---------------	--------------------------------
(vii)	(-35) + (-10) = ----------	--------------------------------

भवन्तः किं पश्यन्ति ? किं पूर्णाङ्कद्वयस्य योगः सदैव पूर्णाङ्कः भवति ? किं भवद्भिः पूर्णाङ्कानाम् एतादृशः युग्मः प्राप्तः यस्य योगः पूर्णाङ्कः नास्ति ?

यतोहि पूर्णाङ्कानां योगः एकः पूर्णाङ्कः भवति, अतः वयं कथयामः यत् पूर्णाङ्केषु योगान्तर्गताः संवृताः (Closed) भवन्ति।

व्यापकरूपेण, a तथा च b इति द्वयोः कयोश्चित् पूर्णाङ्कयोः कृते, a + b अपि एकः पूर्णाङ्कः भवति।

1.3.2 व्यवकलनस्य अन्तर्गतः संवृतः

यदा वयम् एकं पूर्णाङ्कम् अन्यस्मात् पूर्णाङ्कात् व्यवकलयामः, तदा किं भवति ?

किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् तस्य अन्तरम् अपि एकः पूर्णाङ्कः भवति ?

कथनम्				प्रेक्षणम्
(i)	7 - 9	=	-2	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।
(ii)	17 - (-21)	=	--------------	--------------------------------
(iii)	(-8) - (-14)	=	6	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।
(iv)	(-21) - (-10)	=	--------------	--------------------------------
(v)	32 - (-17)	=	--------------	--------------------------------
(vi)	(-18) - (-18)	=	--------------	--------------------------------
(vii)	(-29) - 0	=	--------------	--------------------------------

भवन्तः किं पश्यन्ति ? किं पूर्णाङ्कानां कश्चन एतादृशः युग्मः अस्ति यस्य अन्तरं पूर्णाङ्कः नास्ति ? किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्कस्य व्यवकलनस्य अन्तर्गताः संवृताः सन्ति। आम्, वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्कस्य व्यवकलनस्य अन्तर्गताः संवृताः भवन्ति।

अतः, यदि a तथा च b इति पूर्णाङ्कौ स्तः, तर्हि a - b अपि एकः पूर्णाङ्कः भवति। किं पूर्णसंख्याः अपि एतं गुणं सन्तोषयन्ति ?

1.3.3 क्रमविनिमयगुणः

वयं जानीमः यत् 3+5 = 5+3 = 8 अस्ति, अर्थात् द्वे पूर्णसंख्ये केनापि क्रमेण योजयितुं शक्येते। भिन्नशब्देषु, पूर्णसंख्याभ्यः योगः क्रमविनिमयः भवति।

किम् एतत् एव कथनं वयं पूर्णाङ्कानां कृते अपि वक्तुं शक्नुमः ?

वयं प्राप्नुमः यत् 5 + (- 6) = -1 तथा च (-6) + 5 = -1 इति अस्ति।

अतः 5 + (- 6) = (-6) + 5 इति अस्ति।

किं निम्नलिखितं समानम् अस्ति ?

(i) (- 8) + (-9) तथा च (-9) + (-8)

(ii) (-23) + 32 तथा च 32 + (-23)

(iii) (-45)+ 0 तथा च 0 + (-45)

अन्येभ्यः पञ्चपूर्णाङ्कयुग्मेभ्यः एतादृशं प्रयासं कुर्वन्तु। किं भवद्भिः पूर्णाङ्कानाम् एतादृशः युग्मः प्राप्यते यदर्थं पूर्णाङ्कानां क्रमपरिवर्तनेन तेषां योगः अपि परिवर्तितः भवति ? निःसन्देहं न। अतः, वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्स्यामः यत् योगः पूर्णाङ्केभ्यः क्रमविनिमयः भवति।

व्यापकरूपे, कयोश्चित् पूर्णाङ्कयोः a तथा च b, एतर्थं वयं वक्तुं शक्नुमः यत्

$$a + b = b + a$$

वयं जानीमः यत् व्यवकलनं पूर्णसंख्याभ्यः क्रमविनिमयं नास्ति। किम् एतत् क्रमविनिमेयं पूर्णाङ्केभ्यः अस्ति ?

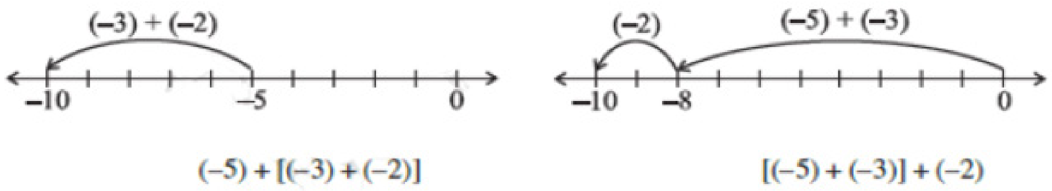
पूर्णाङ्कम् 5 एवम् (-3) इति स्वीकुर्वन्तु। किम् 5 –(-3) एवम् (-3) – 5 परस्परं तुल्ये स्तः ? न, यतोहि 5 –(-3) = 5 + 3 = 8 इति अस्ति, एवं (-3) – 5 = - 3 – 5 = -8 इति अस्ति।

पूर्णाङ्कानां न्यूनातिन्यूनान् पञ्च विभिन्नयुग्मान् स्वीकुर्वन्तु अस्य च कथनस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु। वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् व्यवकलनं पूर्णाङ्केभ्यः क्रमविनिमयं नास्ति।

1.3.4 सहाचर्यगुणः

निम्नलिखितानि उदाहरणाणि पश्यन्तु :

-3 , -2 एवञ्च -5 पूर्णाङ्कान् स्वीकुर्वन्तु। (-5) + [(-3)+(-2)] तथा च [(-5)+(-3)]+(-2) अस्य उपरि ध्यानं यच्छन्तु। प्रथमे योगे (-3) तथा च (-2) एतौ मेयलित्वा एकः समूहः निर्मितः अस्ति। द्वितीये योगे (-5) एवं (-3) एतौ मेयलित्वा एकः समूहः निर्मितः अस्ति। वयम् अस्य निरीक्षणं करिष्यामः यत् किं वयं विभिन्नान् परिणामान् प्राप्नुमः वा इति।



अनयोः द्वयोः स्थित्योः एव (-10) इति प्राप्यते।

अर्थात्, (-5) + [(-3)+(-2)] = [(-5) + (-3)] +(-2)

अनेन एव प्रकारेण, - 3,1 तथा च -7 इति स्वीकुर्वन्तु।

(-3) + [1+(-7)] = -3+ ------ = -------

[(-3) +1]+(-7) = -2+ -------- = ----

किं (-3) + [1+(-7)] एवञ्च [(-3) +1]+(-7) इति समानम् अस्ति ?

एतादृशानि पञ्च अन्यानि उदाहरणानि स्वीकुर्वन्तु। भवन्तः एतादृशं किमपि उदाहरणं नैव प्राप्स्यन्ति यदर्थम् एतादृशाः योगाः विभिन्नाः सन्ति। एतद् दर्शयति यत् पूर्णाङ्केभ्यः योगः सहचारी (associative) भवति।

व्यापकरूपेण, पूर्णाङ्कान् 'a, b तथा च c' इति पूर्णाङ्केभ्यः वयं वक्तुं शक्नुमः यत्

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.3.5 योज्यः तत्समकः

यदा वयं कयापि संख्यया सह शून्यं योजयामः, तदा वयं ताम् एव पूर्णसंख्यां प्राप्नुमः। पूर्णसंख्याभ्यः शून्यम् एकं योज्यं तत्समकम् (additive indenty) अस्ति। किम् एतत् पूर्णाङ्केभ्यः अपि योज्य-तत्समकम् अस्ति ? निम्नलिखितानि रिक्तस्थानानि पश्यन्तु पूरयन्तु च:

(i)	(- 8) + 0 = - 8	(ii)	0 + (-8) = - 8
(iii)	(- 23) + 0 = ------	(iv)	0 + (- 37) = - 37
(v)	0 + 59 = --------	(vi)	0 + --------- = - 43
(vii)	– 61 + ------ = -61	(viii)	----- + 0 = ---------

उपर्युक्तानि उदाहरणानि दर्शयन्ति यत् शून्यं पूर्णाङ्केभ्यः योज्य-तत्समकम् अस्ति। भवन्तः केषुचित् पञ्चसु अन्योदाहरणेषु शून्यं योजयित्वा एतं प्रमाणीकर्तुं शक्नुवन्ति।

व्यापकरूपेण, कस्मैचित् अपि a इति पूर्णाङ्काय,

$$a + 0 = 0 + a$$

प्रयासं कुर्वन्तु

1. एकम् एतादृशं पूर्णाङ्कयुग्मं लिखन्तु यस्य योगः
   (a) एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः।
   (b) शून्यम्।
   (c) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः एकः लघुतरः पूर्णाङ्कः।
   (d) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः केवलम् एकस्मात् लघुतरः पूर्णाङ्कः।
   (e) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः एकः गुरूतरः पूर्णाङ्कः।
2. एकम् एतादृशं पूर्णाङ्कयुग्मं लिखन्तु यस्य व्यवकलनम्
   (a) एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः।
   (b) शून्यम्।
   (c) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः एकः लघुतरः पूर्णाङ्कः।
   (d) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः केवलम् एकस्मात् लघुतरः पूर्णाङ्कः।
   (e) द्वयोः पूर्णाङ्कयोः एकः गुरूतरः पूर्णाङ्कः।

उदाहरणम् 1 एतादृशान् पूर्णाङ्कयुग्मान् लिखन्तु येषाम्

(a) योगः -3 अस्ति। (b) अन्तरम् -5 अस्ति।
(c) अन्तरम् 2 अस्ति। (d) योगः 0 अस्ति।

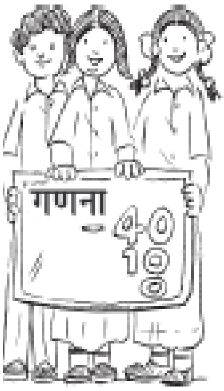
समाधानम्
(a) (-1) + (-2) = -3 अथवा (-5) + 2 = - 3
(b) (-9) – (-4) = - 5 अथवा (-2) – 3 = -5
(c) (- 7) – (-9) = 2 अथवा 1 – (-1) = 2
(d) (-10) + 10 = 0 अथवा 5 + (- 5) = 0

किं भवन्तः एतेषु उदाहरणेषु इतोऽपि अन्यान् युग्मान् लेखितुं शक्नुवन्ति ?

प्रश्नावली 1.2

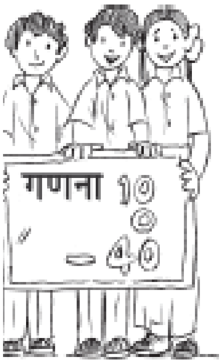
1. एतादृशं पूर्णाङ्कयुग्मं लिखन्तु यस्य
   (a) योगः -7 अस्ति। (b) अन्तरम् -10 अस्ति। (c) योगः 0 अस्ति।

2. (a) एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कयुग्मं लिखन्तु यस्य अन्तरम् 8 अस्ति।
(b) एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कम् एकं च धनात्मकं पूर्णाङ्कं लिखन्तु ययोः अन्तरम् -5 अस्ति।
(c) एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कम् एकं च धनात्मकं पूर्णाङ्कं लिखन्तु ययोः अन्तरम् -3 अस्ति।



3. कस्याञ्चित् प्रश्नोत्तर-प्रतिस्पर्धायां त्रिषु उत्तरोत्तरचक्रेषु (rounds) A दलद्वारा प्राप्ताङ्काः -40,10,0 आसन् तथा च B दलद्वारा प्राप्ताङ्काः 10,0,-40 आसन्। केन दलेन अधिकाः अङ्काः प्राप्ताः? किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्काः केनापि क्रमेण योजयितुं शक्यन्ते ?

4. निम्नलिखितानि कथनानि प्रमाणीकर्तुं रिक्तस्थानां पूर्तिं कुर्वन्तु
(i) (-5) + (-8) = (-8) + (-------)
(ii) – 53 + ---------- = -53
(iii) 17 + --------- = 0
(iv) [13+(-12)]+(-----)=13+[(-12)+(-7)]
(v) (-4) + [15+(-3)]=[-4+15]+------



1.4 पूर्णाङ्कानां गुणनम्

वयं पूर्णाङ्कानां योगम् तथा व्यवकलनं कर्तुम् अर्हामः । आगम्यताम् अधुना 'पूर्णाङ्कानां गुणनं' कथं क्रियते इति अधिगच्छामः।

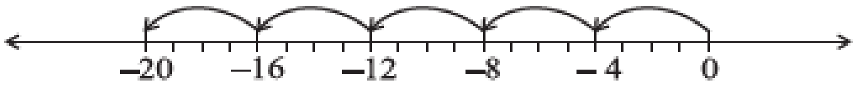
1.4.1 एकस्य धनात्मकस्य एकस्य च ऋणात्मकस्य पूर्णाङ्कस्य गुणनम्

वयं जानीमः यत् पूर्णसंख्यानां गुणनं भूयः भूयः (अनवतरः) योगः एव अस्ति।
प्रयासं कुर्वन्तु
उदाहरणतः, 5 + 5 + 5 = 3 × 5 = 15
किं भवन्तः पूर्णाङ्कानां योगम् अपि एवमेव निरूपयितुं शक्नुवन्ति ?
निम्नलिखितया संख्यारेखया वयं प्राप्नुमः (-5)+(-5)+(-5) = -15 अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

संख्यारेखायाः प्रयोगं कुर्वन्तः, जानीमः
4 × (-8),
8 × (-2),
3 × (-7),
10 × (-1)

परन्तु वयम् एतत् एवम् अपि लेखितुं शक्नुमः
(-5)+(-5)+(-5) = 3× (-5)
अतः 3 × (-5)= -15
अनेन प्रकारेण, (-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4) = 5 × (-4) = -20



अन्यच्च (-3)+(-3)+(-3)+(-3) = --------- = -----------
अपि च, (-7)+(-7)+(-7) = --------------- = ------------
आयान्तु, पश्यामः यत् सङ्ख्या-रेखां विना कथं धनात्मक-पूर्णाङ्कस्य, ऋणात्मक-पूर्णात्मकस्य च गुणनफलं ज्ञायते ?
आयान्तु एकेन प्रकारेण 3 × (-5) इति जानीम। सर्वप्रथमम् 3 × 5 इति जानन्तु प्राप्त-गुणनफलात् च अग्रे ऋणम् (-) इति स्थापयन्तु। भवन्तः -15 इति प्राप्नुवन्ति। अर्थात् -15 इति प्राप्तुं वयं – (3×5) किम् इति जानीमः।

अनेन प्रकारेण $5 \times (-4) = -(5\times4) = -20$ इति अस्ति।

इत्थमेव,निम्नलिखितं ज्ञायताम् :

$4 \times (-8) =$ ______ $=$ ______ , $3 \times (-7) =$ ______ $=$ ______

$6 \times (-5) =$ ______ $=$ ______ , $2 \times (-9) =$ ______ $=$ ______

अस्य विधेः प्रयोगं कुर्वन्तः वयं प्राप्नुमः यत्

$10 \times (-43) =$ ______ $-(10 \times 43) = -430$

अधुना यावत् वयं पूर्णाङ्कानाम् (धनात्मक-पूर्णाङ्कः) x (ऋणात्मक-पूर्णाङ्कः) इति रूपेण गुणनं कृतवन्तः। आयान्तु अधुना एतान् ऋणात्मक-पूर्णाङ्कः x धनात्मक-पूर्णाङ्कः इति रूपेण गुणयामः।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् :

(i) $6 \times (-19)$

(ii) $12 \times (-32)$

(iii) $7 \times (-22)$

सर्वप्रथमं वयं -3×5 इति जानीमः।

एतत् ज्ञातुं निम्नलिखितं क्रमं पश्यामः

वयं प्राप्नुमः $3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$

$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$

अतः $-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$

$-2 \times 5 = -5 - 5 = -10$

$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$

वयं पूर्वम् एव प्राप्तवन्तः यतः $3 \times (-5) = -15$

अतः, वयं प्राप्नुमः यत् $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

एतादृशानां क्रमाणां प्रयोगं कुर्वन्तः, वयम् $(-5) \times 4 = -20 = 5 \times (-4)$ अपि प्राप्नुमः।

क्रमाणाम् उपयोगं कुर्वन्तः $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ तथा च $(-2) \times 9$ जानन्तु अन्यच्च निरीक्षणम् अपि कुर्वन्तु यत् किम्

$(-4) \times 8 = 4 \times (-8)$, $(-3) \times 7 = 3 \times (-7)$, $(-6) \times 5 = 6 \times (-5)$

तथा च $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$ अस्ति ?

अस्य प्रयोगं कुर्वाणाः, वयम् $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ इति प्राप्नुमः।

अनेन प्रकारेण वयं प्राप्नुमः यत् एकस्य धनात्मकपूर्णाङ्कस्य एकस्य च ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य गुणनसमये वयं तान् पूर्णसंख्यारूपेण गुणयामः गुणनफलात् च पूर्वम् ऋणचिह्नम् (-) स्थापयामः। अनेन प्रकारेण वयम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

व्यापकरूपेण, कयोश्चित् द्वयोः धनात्मकपूर्णाङ्कयोः कृते वयं कथयितुं शक्नुमः यत् --

प्रयासं कुर्वन्तु

1. ज्ञायताम् :

   (a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$

   (c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15

2. निरीक्षणं क्रियतां यत् किम्

   (a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ अस्ति ?

   (b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$ अस्ति ?

   अन्यानि पञ्च उदाहरणानि लिखन्तु।

$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$

1.4.2 द्वयोः ऋणात्मकयोः पूर्णाङ्कयोः गुणनम्

किं भवन्तः (-3) × (-2) इत्यस्य गुणनफलं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

अधः पश्यन्तु ?

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$

$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$

$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$

$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3)$

$-3 \times -1 = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

$-3 \times -2 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

किं भवन्तः अत्र कमपि क्रमं पश्यन्ति ? ध्यानं यच्छन्तु यत् गुणनफलानि कथं परिवर्तितानि सन्ति ?

एतेषां प्रेक्षणानाम् आधारेण, निम्नलिखितं पूरयन्तु :

$-3 \times -3 =$ _____, $-3 \times -4 =$ _____

इदानीम् एतानि गुणनफलानि पश्यन्तु, रिक्तस्थानानि च पूरयन्तु :

प्रयासं कुर्वन्तु

(i) (–5) × 4, इतः आरम्भं कुर्वन्तः (–5) × (– 6) इति जानन्तु।

(ii) (– 6) × 3, इतः आरम्भं कुर्वन्तः (– 6) × (–7) इति जानन्तु।

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12 = -16 + 4$

$-4 \times 2 =$ _____ $= -12 + 4$

$-4 \times 1 =$ _____

$-4 \times 0 =$ _____

$-4 \times (-1) =$ _____

$-4 \times (-2) =$ _____

$-4 \times (-3) =$ _____

वयम् एतैः क्रमैः पश्यामः यत्

$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$

$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$

$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$

अन्यत् च $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

अतः $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 =$ _____

$(-4) \times (-3) =$ _____ $=$ _____

अतः एतानि गुणनफलानि पश्यन्तः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् द्वयोः ऋणात्मकयोः पूर्णाङ्कयोः गुणनफलम् एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः भवति। वयं द्वौ ऋणात्मकपूर्णाङ्कौ पूर्णसंख्यानां रूपेण गुणयामः गुणनफलात् च

पूर्वं धनात्मकचिह्नं (+) स्थापयामः।

अनेन प्रकारेण, वयं प्राप्नुमः यत् $(-10) \times (-12) = 120$ वर्तते।

एवम् एव, $(-15) \times (-6) = 90$ अस्ति।

व्यापकरूपेण, कयोश्चित् a एवं b इति धनात्मकयोः पूर्णाङ्कयोः कृते ,

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

प्रयासं कुर्वन्तु	ज्ञायताम् : $(-31) \times (-100)$, $(-25) \times (-72)$, $(-83) \times (-28)$

क्रीडा 1

(i) एकम् एतादृशं फलकं स्वीकुर्वन्तु यस्य उपरि –104 इत्यस्मात् आरभ्य 104 पर्यन्तं पूर्णाङ्काः अङ्किताः स्युः, यथा आकृतौ दर्शितम् अस्ति।

(ii) एकस्मात् स्यूतात् द्वौ नीलौ द्वौ च रक्तौ अक्षौ स्वीकुर्वन्तु। नीलाक्षयोः अङ्कित-बिन्दूनां संख्या धनात्मकपूर्णाङ्कान् दर्शयति, रक्ताक्षयोः च अङ्कित-बिन्दूनां संख्या ऋणात्मकपूर्णाङ्कान् दर्शयति।

104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
–6	–7	–8	–9	–10	–11	–12	–13	–14	–15	–16
–27	–26	–25	–24	–23	–22	–21	–20	–19	–18	–17
–28	–29	–30	–31	–32	–33	–34	–35	–36	–37	–38
–49	–48	–47	–46	–45	–44	–43	–42	–41	–40	–39
–50	–51	–52	–53	–54	–55	–56	–57	–58	–59	–60
–71	–70	–69	–68	–67	–66	–65	–64	–63	–62	–61
–72	–73	–74	–75	–76	–77	–78	–79	–80	–81	–82
–93	–92	–91	–90	–89	–88	–87	–86	–85	–84	–83
–94	–95	–96	–97	–98	–99	–100	–101	–102	–103	–104

(iii) प्रत्येकं क्रीडकः निज गणकं (काउंटर) शून्ये स्थापयिष्यति।

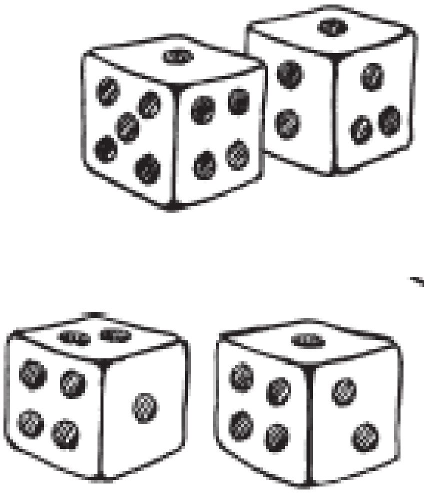
(iv) प्रत्येकं क्रीडकः स्यूतात् युगपत् द्वयोः अक्षयोः निष्कासनं क्षेपणं च करिष्यति।

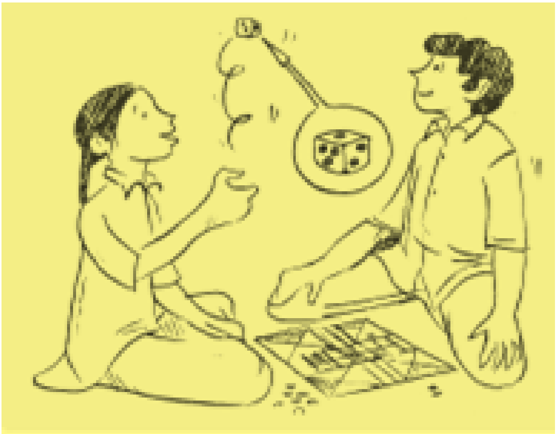
(v) अक्षान् क्षिप्त्वा क्रीडकः प्रतिवारं प्राप्ताः अक्षाङ्किताः संख्याः गुणयेत्।

(vi) यदि गुणनफलम् एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति, तर्हि क्रीडकः निजगणकं (काउंटर) 104

प्रति सारयिष्यति तथा च यदि गुणनफलम् एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः अस्ति, तर्हि सः निजगणकं (काउंटर) -104 प्रति सारयिष्यति।

(vii) यः क्रीडकः सर्वप्रथमं 104 अथवा - 104 सङ्ख्यां इति प्राप्नोति सः विजयी भविष्यति।





1.4.3 त्रयाणाम् अथवा त्र्यधिकानाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलम्

वयं दृष्टवन्तः यत् द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कयोः गुणनफलम् एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति। त्रयाणाम् ऋणात्मक-पूर्णाङ्कानां गुणनफलं किं भविष्यति? चतुर्णाम् ऋणात्मक-पूर्णाङ्कानां गुणनफलं किं भविष्यति ? आगच्छन्तु निम्नलिखितानि उदाहरणानि पश्यामः

(a) $(-4) \times (-3) = 12$

(b) $(-4) \times (-3) \times (-2) = [(-4) \times (-3)] \times (-2)$
$= 12 \times (-2) = -24$

(c) $(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = [(-4) \times (-3) \times (-2)] \times (-1) = (-24) \times (-1)$

(d) $(-5) \times [(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1)] = (-5) \times 24 = -120$

उपर्युक्तैः उदाहरणैः वयं पश्यामः यत्

(a) द्वयोः ऋणात्मक-पूर्णाङ्कानां गुणनफलम् एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति।

(b) त्रयाणाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलम् एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः भवति।

(c) चतुर्णाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलम् एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति।

(d) पञ्च ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलं किम् अस्ति ?

Euler अस्य प्रमेयस्य अवगमने प्रयत्नं कृतवत्सु गणितज्ञः आसीत् यः Ankitung zur Algebra(1770) इति स्वकीये पुस्तके एतत् साधयितुं प्रयत्तवान् यत्
$(-1) \times (-1) = 1$ इति।

एका विशिष्टा स्थितिः

निम्नलिखितेषु कथनेषु एवञ्च परिणामिगुणनफलेषु विचारं कुर्वन्तु :

$(-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

अस्य अर्थः अस्ति यत् यदि पूर्णाङ्कस्य (-1) सङ्ख्या समवारं गुणनं क्रियते तदा गुणनफलम् +1 अस्ति तथा च यदि सङ्ख्या विषमवारं गुणनं क्रियते तदा गुणनफलम् -1 अस्ति। भवन्तः उपरि दत्ते कथने (-1) इत्यस्य युग्मं विधाय अस्य निरीक्षणं कर्तुम् अर्हन्ति। पूर्णाङ्कानां गुणनफलस्य परिज्ञानाय एतत् बहु उपयोगी वर्तते।

षड् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां गुणनफलं किं भविष्यति ?

उपर्युक्ते (a) तथा च (c) मध्ये गुणितानां पूर्णाङ्कानां संख्या समा अस्ति (क्रमशः द्वौ चत्वारः च) (a) तथा च (c) मध्ये प्राप्तं गुणनफलं धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति। (b) एवं च (d) इत्यनयोः मध्ये गुणितानां

ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां संख्या विषमा अस्ति । तथा च (b) एवं च (d) इत्यनयोः मध्ये प्राप्तं गुणनफलम् ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।

अनेन प्रकारेण, वयं प्राप्नुमः यत् गुणनं क्रियमाणानाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां संख्या यदि समा अस्ति, तर्हि गुणनफलं धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति तथा च यदि गुण्यमानाम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां संख्या विषमा अस्ति, तर्हि गुणनफलम् एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।

प्रत्येकम् उदाहरणस्य पञ्च अन्यानि उदाहरणानि दत्त्वा अस्य कथनस्य पुष्टिं कुर्वन्तु ।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

(i) (–9) × (–5) × (– 6) × (–3) इति गुणनफलं धनात्मकम् अस्ति, अपरञ्च (–9) × (–5) × 6 × (–3) गुणनफलम् इति ऋणात्मकम् अस्ति । किमर्थम् ?

(ii) यदि वयं निम्नलिखितं युगपत् गुणयामः तर्हि गुणनफलस्य चिह्नं किं भविष्यति ?

(a) ऋणात्मकपूर्णाङ्काः अष्टौ एवं च धनात्मकपूर्णाङ्काः त्रयः

(b) ऋणात्मकपूर्णाङ्काः पञ्च एवञ्च धनात्मकपूर्णाङ्काः चत्वारः

(c) (-1) द्वादशवारम्

(d) (–1) इति 2m वारं, यत्र m , एका प्राकृतसंख्या अस्ति ।

1.5 पूर्णाङ्कानां गुणनस्य गुणाः

1.5.1 गुणनस्य अन्तर्गतः संवृतः

1. निम्नलिखितां तालिकां पश्यन्तु एतां च पूरयन्तु :

कथनानि	निष्कर्षाः
(–20) × (–5) = 100	गुणनफलम् एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।
(–15) × 17 = – 255	गुणनफलम् एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।
(–30) × 12 = _____	
(–15) × (–23) = _____	
(–14) × (–13) = _____	
12 × (–30) = _____	

भवन्तः किं पश्यन्ति ? किं भवन्तः एकम् एतादृशं पूर्णाङ्कयुग्मं ज्ञातुं शक्नुवन्ति यस्य गुणनफलम् एकः पूर्णाङ्कः नास्ति ? न, अनेन एतत् ज्ञायते यत् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः गुणनफलं पुनः एकः पूर्णाङ्कः एव भवति । अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्कगुणनस्य अन्तर्गतं संवृतः अस्ति ।

व्यापकरूपेण,

a तथा च b इति सर्वेभ्यः पूर्णाङ्केभ्यः, a × b इति एकः पूर्णाङ्कः एव भवति ।

अन्येषां पञ्चानां पूर्णाङ्कयुग्मानां गुणनफलं ज्ञायताम् उपर्युक्तं कथनं च प्रमाणीक्रियताम् ।

1.5.2 गुणनस्य क्रमविनिमयता

वयं जानीमः यत् पूर्णसंख्याभ्यः गुणनं क्रमविनिमयं भवति । किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्केभ्यः अपि

गुणनं क्रमविनिमयं अस्ति ?

निम्नलिखितां तालिकां पश्यन्तु एतां च पूरयन्तु :

कथनम् 1	कथनम् 2	निष्कर्षः
$3 \times (-4) = -12$	$(-4) \times 3 = -12$	$3 \times (-4) = (-4) \times 3$
$(-30) \times 12 =$ _____	$12 \times (-30) =$ _____	
$(-15) \times (-10) = 150$	$(-10) \times (-15) = 150$	
$(-35) \times (-12) =$ _____	$(-12) \times (-35) =$	
$(-17) \times 0 =$ _____		
___________ = _____	$(-1) \times (-15) =$	

भवन्तः किं पश्यन्ति ? उपर्युक्तानि उदाहरणानि सूचयन्ति यत् पूर्णाङ्केभ्यः गुणनं क्रमविनिमेयम् अस्ति। एतादृशानि पञ्च अन्यानि उदाहरणानि लिखन्तु तथा च प्रमाणीकुर्वन्तु।

व्यापकरूपेण, a तथा च b इति कयोश्चित् द्वयोः पूर्णाङ्कयोः कृते,

$$a \times b = b \times a$$

1.5.3 शून्येन गुणनम्

वयं जानीमः यत् यदा कापि पूर्णसंख्या शून्येन गुण्यते, तदा गुणनफलरूपेण शून्यं प्राप्यते। ऋणात्मकपूर्णाङ्कानाम् एवं च शून्यस्य निम्नलिखितानि गुणनफलानि पश्यन्तु। वयं पूर्वप्रयुक्तप्रारूपम् आधारीकृत्य एतानि प्राप्नुमः।

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-4) = 0$

$-5 \times 0 =$ _____

$0 \times (-6) =$ _____

तालिका दर्शयति यत् एकस्य ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य शून्यस्य च गुणनफलं शून्यं भवति।

व्यापकरूपेण, a इति कस्मैचिदपि पूर्णाङ्काय,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

1.5.4 गुणनात्मकः तत्समकः

वयं जानीमः यत् पूर्णसंख्याभ्यः 1 गुणनात्मकः तत्समकः (multiplicative identity) अस्ति। निरीक्षणं कुर्वन्तु यत् 1 पूर्णाङ्केभ्यः अपि गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति। एकेन सह पूर्णाङ्कानां निम्नलिखितानि गुणनफलानि पश्यन्तु :

$(-3) \times 1 = -3$	$1 \times 5 = 5$
$(-4) \times 1 =$ _____	$1 \times 8 =$ _____
$1 \times (-5) =$ _____	$3 \times 1 =$ _____
$1 \times (-6) =$ _____	$7 \times 1 =$ _____

एतत् दर्शयति यत् एकः पूर्णाङ्केभ्यः अपि गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति।

व्यापकरूपे, कस्मैचित् a पूर्णाङ्काय, वयं प्राप्नुमः यत् :

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

यदि कञ्चित् पूर्णाङ्कं -1 द्वारा गुणयामः, तदा किं भवति ? निम्नलिखितं पूरयन्तु :

$(-3) \times (-1) = 3$

$3 \times (-1) = -3$

$(-6) \times (-1) =$ _____

$(-1) \times 13 =$ _____

$(-1) \times (-25) =$ _____

$18 \times (-1) =$ _____

पूर्णाङ्केभ्यः शून्यं योज्यः तत्समकः अस्ति, यद्यपि 1 गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति । यदा कञ्चित् a पूर्णाङ्कं (-1) द्वारा गुणयामः, तदा वयं तस्य पूर्णाङ्कस्य योज्यप्रतिलोमं प्राप्नुमः, अर्थात् $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$ भवति।

भवन्तः किं पश्यन्ति ?

किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् -1 पूर्णाङ्केभ्यः अपि गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति ? न।

1.5.5 गुणनस्य साहचर्यगुणः

-3,-2 तथा च 5 इति स्वीकुर्वन्तु।

$[(-3) \times (-2)] \times 5$ तथा च $(-3) \times [(-2) \times 5]$ इत्यस्य उपरि विचारं कुर्वन्तु।

प्रथमायां स्थितौ, (-3) एवं (-2) मेलयित्वा एकः समूहः निर्मितः अस्ति अपरायां स्थितौ, (-2) एवं 5 मेलयित्वा एकः समूहः निर्मितः वर्तते।

वयं प्राप्नुमः यत् $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

अन्यच्च $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

अनेन प्रकारेण, वयं द्वयोः स्थित्योः एकम् एव उत्तरं प्राप्नुमः

अतः $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

निम्नलिखितं विचारयन्तु गुणनफलानि च पूरयन्तु :

$[7 \times (-6)] \times 4 =$ __________ $\times 4 =$ __________

$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times$ __________ = __________

किम् $[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times (4)]$ अस्ति ?

किं पूर्णाङ्कानां विभिन्नप्रकारेभ्यः समूहेभ्यः गुणनफलं प्रभावितं जायते ?

व्यापकरूपे, केभ्यश्चित् त्रिभ्यः a, b तथा च c पूर्णाङ्केभ्यः,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b तथा च c मध्ये प्रत्येकस्मै पञ्च मानानि स्वीकुर्वन्तु अस्य गुणनं निरूपयन्तु।

अतः पूर्णसंख्यावत् त्रिपूर्णाङ्कानां गुणनफलं तेषां समूहनिर्माणे निर्भरं नैव करोति एतत् च पूर्णाङ्केभ्यः गुणनस्य साहचर्यगुणः इति कथ्यते।

1.5.6 वितरणगुणः

वयं जानीमः यत्

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ [योगस्य उपरि वितरणस्य नियमः]

आयान्तु निरीक्षणं कुर्मः किम् इदं पूर्णाङ्केभ्यः अपि सत्यम् अस्ति ? निम्नलिखितं पश्यन्तु :

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

अन्यत् च $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

अतः, $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

अन्यत् च $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

अतः $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

अन्यत् च $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

अतः $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

किं वयं कथयितुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्केभ्यः अपि योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणनियमः सत्यम् अस्ति ?

आम्

व्यापकरूपे, केभ्यश्चित् a, b तथा च c त्रिपूर्णाङ्केभ्यः,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

a, b तथा च c प्रत्येकस्मै न्यूनातिन्यूनं पञ्च विभिन्नमानानि स्वीकुर्वन्तु उपर्युक्तं च वितरणगुणं निरूपयन्तु।

प्रयासं कुर्वन्तु

(i) किम् $10 \times [(6 + (-2)] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?

(ii) किम् $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?

अधुना निम्नलिखितं विचारयन्तु :

किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ अस्ति ?

आयान्तु अस्य निरीक्षणं कुर्मः

$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$

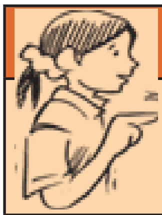
$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$

अतः, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ अस्ति।

निम्नलिखितं विचारयन्तु :

$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$

$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$



प्रयासं कुर्वन्तु

(i) किम् $10 \times (6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$ अस्ति ?

(ii) किम् $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$ अस्ति ?

अतः $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

$(-9) \times [10 - (-3)]$ तथा च $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$

एतदर्थम् अस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु।

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् एतानि सर्वाणि समानानि सन्ति।

व्यापकरूपे, केभ्यश्चित् a, b तथा च c त्रिपूर्णाङ्केभ्यः,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

a, b तथा च c प्रत्येकस्मै न्यूनातिन्यूनं पञ्च मानानि स्वीकृत्य एतं गुणं निरूपयन्तु।

1.5.7 गुणनस्य सरलीकरणम्

निम्नलिखितस्य उपरि विचारं कुर्वन्तु :

(i) (–25) × 37 × 4 इत्येतं वयं [(–25) × 37] × 4 = (– 925) × 4 = –3700 इत्यसमिन् रूपे ज्ञातुम् अर्हामः। अथवा एतत् वयम् अनेन प्रकारेण अपि ज्ञातुं शक्नुमः

(–25) × 37 × 4 = (–25) × 4 × 37 = [(–25) × 4] × 37 = (–100) × 37 = –3700

कतमः विधिः सरलः विद्यते ?

स्पष्टरूपेण द्वितीयः विधिः सरलः वर्तते, यतोहि (–25) इति चतुर्भिः गुणिते सति –100 प्राप्यते यस्य 37 द्वारा गुणनं सरलम् अस्ति। ध्यानं यच्छन्तु द्वितीये विधौ पूर्णाङ्कानां क्रमविनिमयता सहचारिता च सम्मिलिता अस्ति।

अनेन प्रकारेण, वयं पश्यामः यत् पूर्णाङ्कानां क्रमविनिमेयता, सहचारिता वितरणता च परिकलनं सरलीकर्तुम् अस्माकं साहाय्यं करोति। आगच्छन्तु इतः अग्रे इतोऽपि अधिकं पश्यामः यत् एतेषां गुणानाम् उपयोगं कृत्वा कथं परिकलनानि सरलानि कर्तुं शक्यते।

(ii) 16 × 12 ज्ञायताम्।

16 × 12 इति 16 × (10 + 2) इत्यस्मिन् रूपे लिखितुं शक्यते।

16 × 12 = 16 × (10 + 2) = 16 × 10 + 16 × 2 = 160 + 32 = 192

(iii) (–23) × 48 = (–23) × [50 – 2] = (–23) × 50 – (–23) × 2 = (–1150) – (– 46) = –1104

(iv) (–35) × (–98) = (–35) × [(–100) + 2] = (–35) × (–100) + (–35) × 2 = 3500 + (–70) = 3430

(v) 52 × (– 8) + (–52) × 2

(–52) × 2 इति 52 × (–2) अस्मिन् रूपे अपि लिखितुं शक्यते।

अतः, 52 × (– 8) + (–52) × 2 = 52 × (– 8) + 52 × (–2)

= 52 × [(– 8) + (–2)] = 52 × [(–10)] = –520

प्रयासं कुर्वन्तु

वितरणगुणस्य उपयोगं कुर्वन्तः, (– 49) × 18; (–25) × (–31);
70 × (–19) + (–1) × 70 अस्य मानानि ज्ञायताम्।

उदाहरणम् 2 निम्नलिखितेषु प्रत्येकं गुणनफलं ज्ञायताम्

(i) (–18) × (–10) × 9 (ii) (–20) × (–2) × (–5) × 7

(iii) (–1) × (–5) × (– 4) × (– 6)

समाधानम्

(i) (–18) × (–10) × 9 = [(–18) × (–10)] × 9 = 180 × 9 = 1620

(ii) (–20) × (–2) × (–5) × 7 = – 20 × (–2 × –5) × 7 = [–20 × 10] × 7 = – 1400

(iii) (–1) × (–5) × (– 4) × (– 6) = [(–1) × (–5)] × [(– 4) × (– 6)] = 5 × 24 = 120

उदाहरणम् 3 निरूपयन्तु -

$(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

समाधानम् $(-30) \times [13 + (-3)] = (-30) \times 10 = -300$

$[(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)] = -390 + 90 = -300$

अतः, $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

उदाहरणम् 4 15 प्रश्नयुतायाम् एकस्यां कक्ष्यापरीक्षायाम्, प्रत्येकं शुद्ध-उत्तराय 4 अङ्काः दीयन्ते प्रत्येकं च अशुद्ध-उत्तराय (-2) अङ्काः दीयन्ते। (i) गुरूप्रीतवर्या सर्वान् प्रश्नान् साधयति, परन्तु तस्याः उत्तरेषु केवलं 9 उत्तराणि एव शुद्धानि सन्ति। तया कियन्तः अङ्काः प्राप्ताः ? (ii) तस्याः एकस्य मित्रस्य केवलं 5 उत्तराणि शुद्धानि सन्ति। तस्याः मित्रद्वारा कियन्तः अङ्काः प्राप्ताः ?

समाधानम्

(i) शुद्ध-उत्तराय दीयमानाः अङ्काः = 4

अतः 9 शुद्ध-उत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः $= 4 \times 9 = 36$

एकस्मै अशुद्ध-उत्तराय दीयमानाः अङ्काः $= -2$

अतः 6 $(= 15 - 9)$ अशुद्ध-उत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः $= (-2) \times 6 = -12$

अतः गुरूप्रीतद्वारा प्राप्ताः अङ्काः $= 36 + (-12) = 24$

(ii) एकस्मै शुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः = 4

अनेन प्रकारेण, 5 शुद्धोत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः $= 4 \times 5 = 20$

एकस्मै अशुद्धोत्तराय दीयमानाः अङ्काः $= -2$

अतः, 10 $(=15 - 5)$ अशुद्धोत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः $= (-2) \times 10 = -20$

अतः, गुरूप्रीतमहोदयायाः मित्रेण प्राप्ताः अङ्काः $= 20 + (-20) = 0$

उदाहरणम् 5 कल्पनां कुर्वन्तु यत् पृथ्वीतः उपरिस्थः अन्तरालः धनात्मकपूर्णाङ्केन निरूप्यते पृथ्वीतः अधस्स्थः अन्तरालः ऋणात्मक-पूर्णाङ्केन निरूप्यते, तदा निम्नलिखितानाम् उत्तराणि यच्छन्तु :

(i) एकः उत्थापकः(elevator) कस्मिंश्चित् आकरे 5 मी. प्रति मिनटमानेन अधः गच्छति। एकाहोरायाः अनन्तरं तस्य का स्थितिः भविष्यति ?

(ii) यदि सः भूमितः 15 मी. उपरिष्टात् अधः आगच्छति, तर्हि 45 निमेषानन्तरं तस्य का स्थितिः भविष्यति ?

समाधानम्

(i) यतो हि उत्थापकः अधः गच्छन् अस्ति, अतः तेन अतिक्रमितः अन्तरालः ऋणात्मकपूर्णाङ्केन निरूपयिष्यते।

एकस्मिन् निमेषे उत्थापकस्य स्थितौ परिवर्तनम् = - 5 मी.

60 निमेषानन्तरम् उत्थापकस्य स्थितौ परिवर्तनम् $= (-5) \times 60 = -300$ मी.,अर्थात् भूमितलतः 300 मी अधः।

(ii) 45 निमेषेषु उत्थापकस्य स्थितौ परिवर्तनम् $= (-5) \times 45 = -225$ मी.

अतः, उत्थापकस्य अन्तिमा स्थितिः $= -225 + 15 = -210$ मी., अर्थात् भूमितलतः 210 मी. अधः।

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखितानां गुणनफलानि ज्ञायताम् :

(a) $3 \times (-1)$	(b) $(-1) \times 225$
(c) $(-21) \times (-30)$	(d) $(-316) \times (-1)$
(e) $(-15) \times 0 \times (-18)$	(f) $(-12) \times (-11) \times (10)$
(g) $9 \times (-3) \times (-6)$	(h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$
(i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$	(j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

2. निम्नलिखितानि निरूपयन्तु -

   (a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

   (b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

3. (i) कस्यचित् पूर्णाङ्कस्य $(-1) \times a$ कस्य सामानम् अस्ति ?

   (ii) सः पूर्णाङ्कः ज्ञायतां, यस्य (-1) इत्यनेन सह प्राप्तं :

   (a) -22 (b) 37 (c) 0

4. $(-1) \times 5$ इतः आरभ्य विभिन्नैः गुणनफलैः कञ्चित् क्रमं दर्शयन् $(-1) \times (-1) = 1$ इति निरूपयन्तु।

5. उचितगुणनाम् उपयोगं कुर्वन्तः, गुणनफलं ज्ञायताम् :

(a) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$	(b) $8 \times 53 \times (-125)$
(c) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$	(d) $(-41) \times 102$
(e) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$	(f) $7 \times (50 - 2)$
(g) $(-17) \times (-29)$	(h) $(-57) \times (-19) + 57$

6. कस्याञ्चित् हिमीकरणप्रक्रकियां, प्रकोष्ठस्य तापमानं प्रति-घण्टा 40°C तः 5°C पर्यन्तं इति स्तरे न्यूनीकरणस्य आवश्यकता अस्ति। अस्याः प्रक्रियायाः आरम्भात् 10 होराणाम् अनन्तरं, प्रकोष्ठस्य तापमानं किं भविष्यति ?

7. दशप्रश्नयुतायाम् एकस्यां कक्षपरीक्षायां प्रत्येकं शुद्ध-उत्तराय 5 अङ्काः दीयन्ते प्रत्येकं च अशुद्ध-उत्तराय (-2) अङ्काः दीयन्ते एवञ्च प्रयत्नरहितेभ्यः प्रश्नेभ्यः शून्यम् अङ्काः दीयन्ते।

   (i) मोहनः चत्वारि शुद्धोत्तराणि षड् च अशुद्धोत्तराणि ददाति। सः कियतः अङ्कान् प्राप्नोति ?

   (ii) रेशमायाः पञ्च उत्तराणि शुद्धानि सन्ति पञ्च च अशुद्धोत्तराणि सन्ति। तया कियन्तः अङ्काः प्राप्ताः ?

   (iii) हीना सप्त प्रश्नान् कृतवती तेषु द्वयोः उत्तरं शुद्धम् अस्ति पञ्चानां च प्रश्नानाम् उत्तराणि अशुद्धानि सन्ति। सा कियतः अङ्कान् प्राप्नोति ?

8. एकः पाषाणचूर्ण-यन्त्रागारः श्वेतपाषाणचूर्णं 8 रू. प्रतिस्यूतम् इति स्तरे लाभं प्राप्नोति धुसरवर्णस्य च पाषाणचूर्णं 5 रू. प्रतिस्यूतम् इति स्तरे हानिं प्राप्नोति।

   (a) कस्मिंश्चित् मासे सः पाषाणचूर्णोद्योगः 3000 स्यूतान् श्वेतपाषाणचूर्णस्य 5000 स्यूतान् धुसरपाषाणचूर्णस्य विक्रीणाति। तस्य पाषाणचूर्णोद्योगस्य लाभः हानिः च किम् अस्ति ?

   (b) यदि धुसरपाषाणचूर्णस्य स्यूतानां संख्या 6400 अस्ति, तर्हि पाषाणचूर्णोद्योगः श्वेतपाषाणचूर्णस्य कियतः स्यूतान् विक्रीणीयात्, येन सः न लाभः न च हानिः प्राप्नुयात्।

9. निम्नलिखितं कथनं सत्ये परिवर्तितुम्, रिक्तस्थानानि एकेन पूर्णाङ्केन प्रतिस्थापितं कुर्वन्तु :

(a) $(-3) \times$ _____ $= 27$ (b) $5 \times$ _____ $= -35$

(c) _____ $\times (-8) = -56$ (d) _____ $\times (-12) = 132$

1.6 पूर्णाङ्कानां विभाजनम्

वयं जानीमः यत् विभाजनं, गुणनस्य विपरीता संक्रिया अस्ति। आयान्तु पूर्णसंख्याभ्यः एकम् उदाहरणं पश्यामः

यतो हि $3 \times 5 = 15$ अस्ति, अतः $15 \div 5 = 3$ तथा च $15 \div 3 = 5$ अस्ति।

अनेन प्रकारेण, $4 \times 3 = 12$ तः $12 \div 4 = 3$ एवं च $12 \div 3 = 4$ इति प्राप्तं भवति।

एवं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णसंख्यानां प्रत्येकं गुणनकथनाय द्वौ विभाजन-भागौ, कथनम् अस्ति।

किं भवन्तः पूर्णाङ्केभ्यः गुणनकथनानि एवं संगतभागान् लिखितुं शक्नुवन्ति ?

- निम्नलिखितां तालिकां पश्यन्तु एतां च पूरयन्तु।

गुणनकथनानि	संगतभागस्य कथनानि	
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$,	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$,	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div$ _____ = _____ ,	$72 \div$ _____ = _____
$(-3) \times (-7) =$ _____	_____ $\div (-3) =$ _____ ,	_____________
$(-8) \times 4 =$ _____	_____________ ,	_____________
$5 \times (-9) =$ _____	_____________ ,	_____________
$(-10) \times (-5) =$	_____________ ,	_____________

उपर्युक्तेन वयं पश्यामः यत्

$(-12) \div 2 = (-6)$ $(-20) \div (5) = (-4)$

$(-32) \div 4 = -8$ $(-45) \div 5 = -9$

वयं पश्यामः यत् यदा वयम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कं धनात्मकपूर्णाङ्केन विभाजयामः, तदा वयं तान् पूर्णसंख्यायाः रूपेण विभाजयामः ततश्च भागफलात् पूर्वम् ऋणचिह्नं (-) स्थापयामः। अनेन प्रकारेण, वयम् एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् :

(a) $(-100) \div 5$ (b) $(-81) \div 9$

(c) $(-75) \div 5$ (d) $(-32) \div 2$

- वयम् इदम् अपि पश्यामः यत्

$72 \div (-8) = -9$ अथवा $50 \div (-10) = -5$

$72 \div (-9) = -8$ $50 \div (-5) = -10$

अनेन प्रकारेण, यदा वयम् एकं धनात्मकपूर्णाङ्कम् एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन विभाजयामः, तदा सर्वप्रथमं वयं तान् पूर्णसंख्यायाः रूपेण विभाजयामः तदनन्तरं भागफलात् पूर्वम् ऋणचिह्नं (-) स्थापयामः। अनेन प्रकारेण वयम् एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

किं वयं कथयितुं शक्नुमः यत् (– 48) ÷ 8 = 48 ÷ (– 8)? आयान्तु निरीक्षणं कुर्मः। वयं जानीमः यत् (– 48) ÷ 8 = – 6 तथा च 48 ÷ (– 8) = – 6 । अतः (– 48) ÷ 8 = 48 ÷ (– 8) । निम्नलिखितस्य कृते अस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु ।

(i) 90 ÷ (– 45) तथा च (–90) ÷ 45 (ii) (–136) ÷ 4 तथा च 136 ÷ (– 4)

व्यापकरूपेण, काभ्याञ्चित् a तथा च b धनात्मकपूर्णाङ्काभ्याम्,

$a \div (-b) = (-a) \div b$, यत्र $b \neq 0$ अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् (a) 125 ÷ (–25) (b) 80 ÷ (–5) (c) 64 ÷ (–16)

- अन्ते, वयं पश्यामः यत्

  (–12) ÷ (– 6) = 2; (–20) ÷ (– 4) = 5; (–32) ÷ (– 8) = 4; (– 45) ÷ (–9) = 5

  अनेन प्रकारेण, वयं वक्तुं शक्नुमः यदा वयम् एकम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कम् एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन विभाजयामः, तदा सर्वप्रथमं वयं तान् पूर्णसंख्यायाः रूपेण विभाजयामः ततश्च भागफलात् पूर्वं धनात्मकचिह्नं (+) स्थापयामः, अर्थात् वयम् एकम् धनात्मकं पूर्णाङ्कं प्राप्नुमः।

व्यापकरूपेण, काभ्याञ्चित् a तथा च b ऋणात्मकपूर्णाङ्काभ्याम्,

$(-a) \div (-b) = a \div b$, यत्र $b \neq 0$ अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

ज्ञायताम् (a) (–36) ÷ (– 4) (b) (–201) ÷ (–3) (c) (–325) ÷ (–13)

1.7 पूर्णाङ्कानां विभाजनस्य

निम्नलिखितां तालिकां पश्यन्तु पूरयन्तु च :

कथनम्	निष्कर्षः	कथनम्	निष्कर्षः
(– 8) ÷ (– 4) = 2	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ।	(– 8) ÷ 3 = (-8)/(3)	________
(– 4) ÷ (– 8) = (-4)/(-8)	परिणामः एकः पूर्णाङ्कः नास्ति ।	3 ÷ (– 8) = 3/(-8)	________

भवन्तः किं पश्यन्ति ? वयं पश्यामः यत् पूर्णाङ्कभागस्य अन्तर्गतः संवृतः नास्ति । निजपक्षात् पञ्चोदाहरणानि स्वीकुर्वन्तः, अस्य कथनस्य सत्यतायाः उचितं कारणं वदन्तु ।

- वयम जानीमः यत् पूर्णसंख्याभ्यः विभाजनस्य क्रमविनिमयः नास्ति । आयान्तु पूर्णाङ्केभ्यः अपि अस्य निरीक्षणं कुर्मः ।

  भवन्तः तालिकां द्रष्टुम् अर्हन्ति यत् (– 8) ÷ (– 4) ≠ (– 4) ÷ (– 8) अस्ति ।

  किम् (– 9) ÷ 3 तथा च 3 ÷ (– 9) एकसमानम् अस्ति ?

  किम् (– 30) ÷ (– 6) तथा च (– 6) ÷ (– 30) एकसमानम् अस्ति ?

  किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णाङ्केभ्यः भागः क्रमविनिमयः अस्ति ?

  नैव । भवन्तः पञ्च अन्यानि पूर्णाङ्कयुग्मानि स्वीकृत्य इदं सत्यापितं कर्तुं शक्नुवन्ति ।

- पूर्णसंख्यानाम् इव, कस्यचित् अपि पूर्णाङ्कस्य शून्येन सह भागः अर्थहीनः वर्तते शून्येतरेण पूर्णाङ्केन शून्यं भागे सति शून्यमेव प्राप्यते, अर्थात् कस्मैचित् a पूर्णाङ्काय $a \div 0$ परिभाषितं नास्ति। परन्तु $0 \div a = 0, a \neq 0$ एतदर्थम् अस्ति।
- यदा काचित् पूर्णसङ्ख्या एकेन विभाज्यते तदा सा एव संख्या। आगच्छन्तु अस्य निरीक्षणं कुर्मः किम् एतत् ऋणात्मकपूर्णाङ्केभ्यः अपि सत्यम् अस्ति।

  निम्नलिखितं पश्यन्तु :

  $(-8) \div 1 = (-8)$ $(-11) \div 1 = -11$ $(-13) \div 1 = -13$

  $(-25) \div 1 =$ ____ $(-37) \div 1 =$ ____ $(-48) \div 1 =$ ____

  एतत् दर्शयति यत् ऋणात्मकपूर्णाङ्कम् एकेन भागे सति सः एव ऋणात्मकपूर्णाङ्कः प्राप्तः भवति। अतः कश्चित् पूर्णाङ्कः एकेन विभाज्यते सः एव पूर्णाङ्कः प्राप्यते। व्यापकरूपे, कस्मैचित् a पूर्णाङ्काय,

  $$a \div 1 = a$$

- कञ्चित् पूर्णाङ्कम् (-1) द्वारा विभाजयामः किं भवति ? निम्नलिखितं तालिकां पूरयन्तु :

  $(-8) \div (-1) = 8$ $11 \div (-1) = -11$ $13 \div (-1) =$ ____

  $(-25) \div (-1) =$ ____ $(-37) \div (-1) =$ ____ $-48 \div (-1) =$ ____

  भवन्तः किं पश्यन्ति ?

  वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कञ्चित् पूर्णाङ्कं (-1) द्वारा विभाजयामः सः एव पूर्णाङ्कः नैव प्राप्यते।
- किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $[(-16) \div 4] \div (-2)$ एवं $(-16) \div [4 \div (-2)]$ समानम् अस्ति ?

  वयं जानीमः यत् $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

  तथा च $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

  अतः $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

  किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् पूर्णाङ्केभ्यः भागः साहचर्यं नास्ति।

  स्वकीयपक्षात् पञ्च अन्यानि उदाहराणि इदं निरूपयन्तु।

प्रयासं कुर्वन्तु

किं कस्यचित् a पूर्णाङ्कस्य कृते

(i) $1 \div a = 1$ अस्ति?

(ii) $a \div (-1) = -a$ अस्ति ? a इत्यस्य विभिन्नमानेभ्यः अस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 6 कस्याञ्चित् परीक्षायां शुद्ध-उत्तराय (+5) अङ्काः दीयन्ते प्रत्येकं (प्रत्येकस्मै) च अशुद्ध-उत्तराय (-2) अङ्काः दीयन्ते। (i) राधिका सर्वेषां प्रश्नानाम् उत्तराणि अददत् 30 च अङ्कान् आप्तवती, यद्यपि तस्याः 10 प्रश्नाः एव शुद्धाः आसन्। (ii) जयः अपि सर्वेषां प्रश्नानाम् उत्तराणि अददत् सः च (-12) अङ्कान् आप्तवान्, यद्यपि तस्य चत्वारि उत्तराणि शुद्धानि आसन्। तयोः मध्ये प्रत्येकं कतिप्रश्नानाम् अशुद्धानि उत्तराणि अददत् ?

समाधानम्

(i) एकस्य शुद्ध-उत्तराय दीयमानाः अङ्काः = 5

अतः, 10 शुद्ध-उत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः $= 5 \times 10 = 50$

राधिकाद्वारा प्राप्ताः अङ्काः = 30

अशुद्ध-उत्तराय दीयमानाः अङ्काः $= 30 - 50 = -20$

एकस्मै अशुद्ध-उत्तराय दीयमानाः अङ्काः = (-2)

अतः, अशुद्ध-उत्तराणां संख्या $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) चतुर्भ्यः शुद्ध-उत्तरेभ्यः दीयमानाः अङ्काः $= 5 \times 4 = 20$

जयद्वारा प्राप्ताः अङ्काः = -12

अशुद्ध-उत्तरेभ्यः प्रदत्ताः अङ्काः $= -12 - 20 = -32$

अतः, अशुद्ध-प्रश्नानां संख्या $= (-32) \div (-2) = 16$

उदाहरणम् 7 काचित् आपणिका एकरूप्यकस्य लाभः एकस्याः लेखन्याः विक्रयेण अर्जयति स्वकीयस्य च पुरातनभण्डारस्य अङ्कनीः विक्रणन्ती सा प्रति-अङ्कनी 40 पणाः (पैसे) हानिं वहति।

(i) कस्मिंश्चित् विशिष्टे मासे सा 5 रूप्यकाणां हानिं वहति।
अस्याम् अवधौ सा 45 लेखनीः व्यक्रीणात्। उच्यताम् अस्याम् अवधौ सा कियतीः अङ्कनीः विक्रीतवती।

(ii) अग्रिमे मासे सा न तु लाभं न च हानिं प्राप्तवती। यदि अस्मिन् मासे सा 70 लेखनीः व्यक्रीणात्, तदा सा कियतीः अङ्कनीः विक्रीतवती ?

समाधानम्

(i) एकस्याः लेखन्याः विक्रयेण अर्जितः लाभः = 1 रू.

45 लेखनीनां विक्रयेण अर्जितः लाभः = 45 रू.

यं वयं '+ 45 रू.' इति रूपेण निर्दिष्टं कुर्मः।

प्रदत्ता हानिः = 5 रू.,यां वयं '-5 रू.'इति रूपेण निर्दिष्टां कुर्मः।

अर्जितः लाभः + उढा हानिः = अखिला हानिः

अतः, उढा हानिः = अखिला हानिः - अर्जितः लाभः

= (-5 -45) रू = (-50) रू = - 5000 पणाः (पैसे)

एकस्याः अङ्कन्याः विक्रयणेन उढा हानिः = 40 पणाः यान् वयं - 40 पणाः इति लिखामः।

अतः विक्रीतानाम् अङ्कनीनां संख्या $= (-5000) \div (-40) = 125$ अङ्कन्यः

(ii) अग्रिमे मासे सा न तु लाभं न च हानिं प्राप्तवती।

अतः, अर्जितः लाभः + उढा हानिः = 0

अर्थात् अर्जितः लाभः = - उढा हानिः

अधुना, 70 लेखनीनां विक्रयेण अर्जितः लाभः = 70 रू.

अतः अङ्कनीनां विक्रयेण उढा हानिः = 70 रू.,यं वयं – 70 रू.अर्थात् – 7000 पणैः दर्शयामः।

विक्रीतानाम् अङ्कनीनां संख्या $= (-7000) \div (-40) = 175$ अङ्कन्याः।

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखितेषु प्रत्येकं मानं ज्ञायताम् :
   (a) $(-30) \div 10$ (b) $50 \div (-5)$ (c) $(-36) \div (-9)$
   (d) $(-49) \div (49)$ (e) $13 \div [(-2) + 1]$ (f) $0 \div (-12)$
   (g) $(-31) \div [(-30) + (-1)]$
   (h) $[(-36) \div 12] \div 3$ (i) $[(-6) + 5)] \div [(-2) + 1]$
2. निम्नलिखितानां a, b तथा च c इत्येतेषां मानेषु प्रत्येकस्य कृते, $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ इति निरूपयन्तु।
   (a) $a = 12, b = -4, c = 2$ (b) $a = (-10), b = 1, c = 1$

3. रिक्तस्थानानां पूर्तिं कुर्वन्तु :

(a) $369 \div$ _____ $= 369$ (b) $(-75) \div$ _____ $= -1$

(c) $(-206) \div$ _____ $= 1$ (d) $-87 \div$ _____ $= 87$

(e) _____ $\div 1 = -87$ (f) _____ $\div 48 = -1$

(g) $20 \div$ _____ $= -2$ (h) _____ $\div (4) = -3$

4. पञ्च एतादृशान् पूर्णाङ्कयुग्मान् (a, b) लिखन्तु,येन $a \div b = -3$ स्यात्। एतादृशः एकः युगमः (6, –2) अस्ति, यतोहि $6 \div (-2) = (-3)$ अस्ति।

5. मध्याह्ने 12 वादने तापमानं 10°C तः उपरि आसीत्। यदि इदम् अर्धरात्रीं यावत् प्रति-घण्टा 2°C इति स्तरे न्यूनं भवति, तदा कस्मिन् समये तापमानं शून्यात् 8°C अधः भविष्यति ? अर्धरात्र्यां किं तापमानं भविष्यति ?

6. एकस्यां कक्षापरीक्षायां प्रत्येकं शुद्ध-उत्तराय (+3) अङ्काः दीयन्ते प्रत्येकम् अशुद्धोत्तराय (-2) अङ्काः दीयन्ते कञ्चित् च प्रश्नं साधयितुम् अप्रयत्ने सति किमपि अङ्काः न दीयन्ते (i) राधिका 20 अङ्कान् प्राप्तवती। यदि तस्याः 12 उत्तराणि शुद्धानि सन्ति, तदा तया कति प्रश्नानाम् अशुद्धम् उत्तरं दत्तम् ? (ii) मोहनी परीक्षायां (-5) अङ्कान् प्राप्नोति, यद्यपि तस्याः 7 उत्तराणि शुद्धानि आसन् । तया कति प्रश्नानाम् उत्तरम् अशुद्धं दत्तम् ?

7. एकः उत्थापकः कस्मिंश्चित् आकरे 6 मी. प्रति निमेष-स्तरेण अधः गच्छति। यदि अधः गमनं भूमितलात् 10 मी. उपरिष्ठात् आरम्भं भवति, तदा -350 मी. पर्यन्तं प्राप्तुं सः कियन्तं कालं स्वीकरिष्यति ?

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1 पूर्णाङ्कः संख्यानां विशालः संग्रहः अस्ति यस्मिन् पूर्णसंख्याः तेषां च ऋणात्मकाः सम्मिलिताः सन्ति। एतेषां परिचयः परिचयः VI कक्ष्यायां कारितम् आसीत्।

2. भवद्भिः गतकक्ष्यायां पूर्णाङ्कानां संख्यारेखायां निरूपणं तेषां च योगस्य एवं च व्यवकलनस्य विषये अपि अधीतम्।

3. अधुना अस्माभिः योगेन एवं च व्यवकलनेन च सन्तुष्यमाणानां गुणानाम् अध्ययनं कुर्मः।

(a) पूर्णाङ्कः योगस्य एवं व्यवकलनस्य कृते संवृतः अस्ति। अर्थात् $a + b$ तथा च $a - b$ द्वौ एव पुनः पूर्णाङ्कौ भवतः, यत्र a तथा च b कश्चन पूर्णाङ्कः अस्ति।

(b) पूर्णाङ्केभ्यः योगः क्रमविनिमयः अस्ति, अर्थात् सर्वेभ्यः a तथा च b पूर्णाङ्केभ्यः $a + b = b + a$

(c) पूर्णाङ्केभ्यःयोगस्य साहचर्यः अस्ति, अर्थात् सर्वेभ्यः a, b तथा च c पूर्णाङ्केभ्यः $(a + b) +c = a + (b + c)$ भवति।

(d) योगस्य अन्तर्गतः पूर्णाङ्कः शून्यस्य तत्समकः अस्ति, अर्थात् कस्मैचित् a पूर्णाङ्काय $a + 0 = 0 + a = a$ इति भवति।

4. वयम् अधीतवन्तः यत् पूर्णाङ्काः कथं गुण्यन्ते इति, अस्माभिः च एतत् अपि दृष्टं यत् एकस्य धनात्मकस्य एकस्य च ऋणात्मकस्य पूर्णाङ्कस्य गुणनफलम् एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवति, यद्यपि द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कयोः गुणनफलम् एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः भवति।

उदाहरणतः, $-2 \times 7 = -14$ एवं $-3 \times -8 = 24$ अस्ति।

5. ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां समसंख्यायां सत्यां तेषां गुणनफलं धनात्मकं भवति किन्तु अस्यां संख्यायां विषमांा सत्याम् अपि गुणनफलम् ऋणात्मकं भवति।

6. पूर्णाङ्कस्य गुणनान्तर्गतान् केचन गुणान् दर्शयामः
   (a) गुणनान्तर्गताः पूर्णाङ्काः संवृताः भवन्ति, अर्थात् काभ्याञ्चित् a तथा च b पूर्णाङ्काभ्यां $a \times b$, एकः पूर्णाङ्कः भवति ।
   (b) पूर्णाङ्केभ्यः गुणनं क्रमविनिमयः भवति, अर्थात् काभ्याञ्चित् a तथा च b पूर्णाङ्काभ्यां $a \times b = b \times a$ भवति।
   (c) गुणनस्य अन्तर्गतः 1 पूर्णाङ्कः, तत्समकः अस्ति, अर्थात् कस्मैञ्चित् अपि a पूर्णाङ्काय $1 \times a = a \times 1 = a$ भवति ।
   (d) पूर्णाङ्केभ्यः गुणनं साहचर्यं भवति, अर्थात् केषाञ्चित् त्रयाणां a, b तथा च c पूर्णाङ्केभ्यः $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ भवति ।
7. योगस्य एवं गुणनस्य अन्तर्गतः पूर्णाङ्कम् एकं गुणं दर्शयन्ति, यः वितरणगुणः इति कथ्यते, अर्थात् केषाञ्चित् त्रयाणां a, b तथा च c पूर्णाङ्केभ्यः, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ भवति।
8 योगस्य एवं गुणनस्य अन्तर्गतः क्रमविनिमेयतायाः, सहचारितायाः वितरणतायाः च गुणाः अस्माकं परिकलनं सरलं कुर्वन्ति ।
9. अस्माभिः एतत् अपि अधिगतं यत् कथं पूर्णाङ्कानां विभाजनं क्रियते । वयं प्राप्तवन्तः यत्
   (a) यदा एकं धनात्मकं पूर्णाङ्कम् एकेन ऋणात्मक-पूर्णाङ्केन विभज्यते अथवा यदा एकम् ऋणात्मकं पूर्णाङ्कम् एकेन धनात्मक-पूर्णाङ्केन विभज्यते तु प्राप्तं भागफलम् एकः ऋणात्मक-पूर्णाङ्कः भवति ।
   (b) एकम् ऋणात्मक-पूर्णाङ्कः अपरेण ऋणात्मक-पूर्णाङ्केन विभाज्य प्राप्तं भागफलम् एकः धनात्मक-पूर्णाङ्कः भवति ।
10. कस्मैचित् अपि a पूर्णाङ्काय, वयं प्राप्नुमः यत्
   (a) $a \div 0$ परिभाषितं नास्ति ।
   (b) $a \div 1 = a$ अस्ति ।